

Kontinuummechanikai alapok

Az alakváltozás leírása

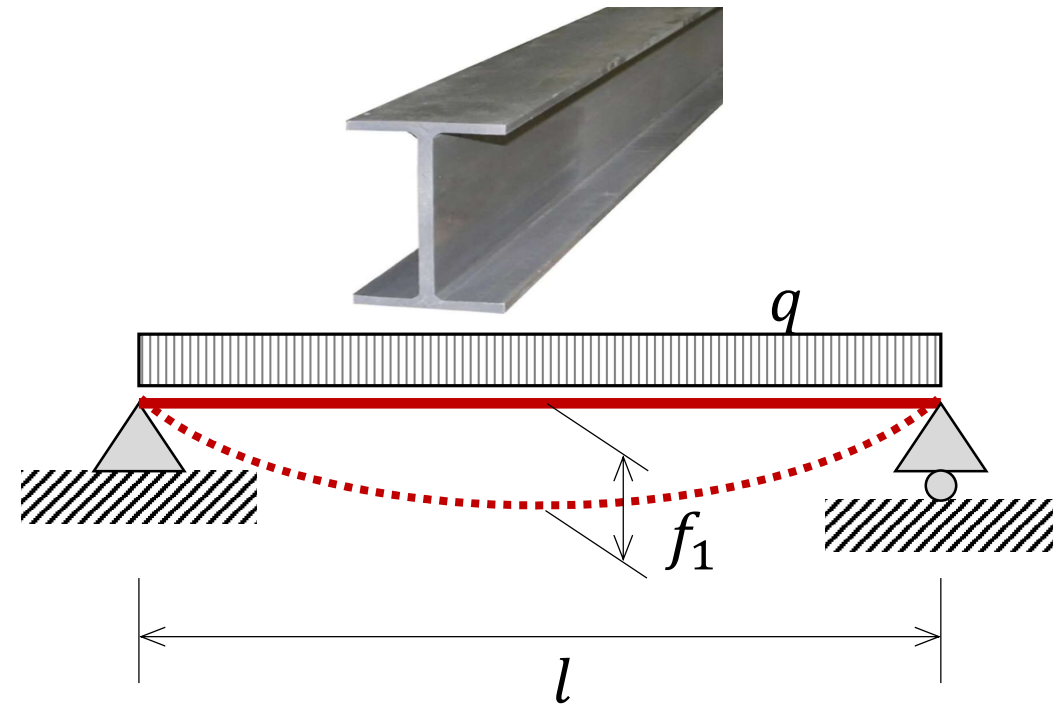
Alakítótechnológiák elmélete
(BMEGEMTNG00)

Katula Levente
katula.levente@gpk.bme.hu

- Bevezetés
- Vektor- és mátrixműveletek
- Deformáció gradiens
- Alakváltozás
- Végeselem-módszer

A test anyagszerkezetére nem teszünk semmilyen feltevést. A kontinuumban az anyagi pontok szorosan és hézagmentesen helyezkednek el, így a test tömege folytonosan tölti ki a test térfogatát és a testre jellemző fizikai mennyiségek folytonos függvények.

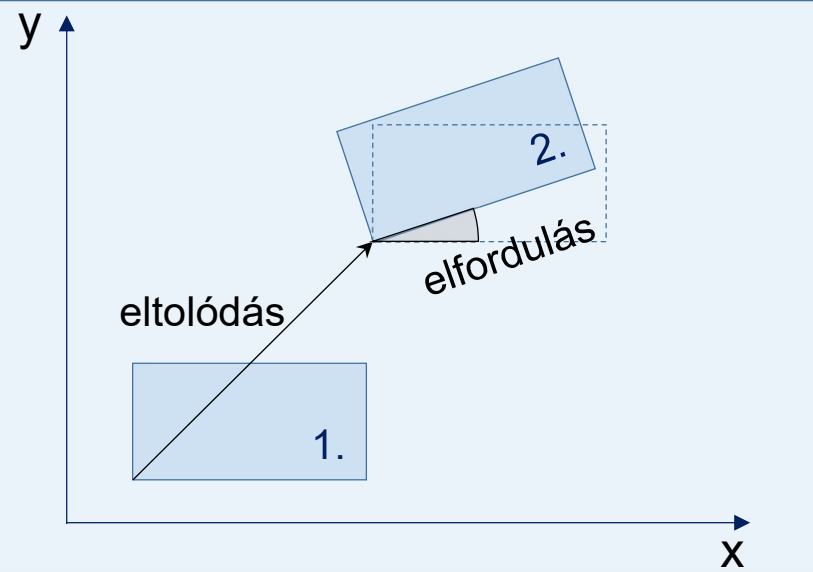
A test terhekre és hatásokra adott válaszát, viselkedését, a tapasztalatból ismert anyagállandókkal írjuk le.



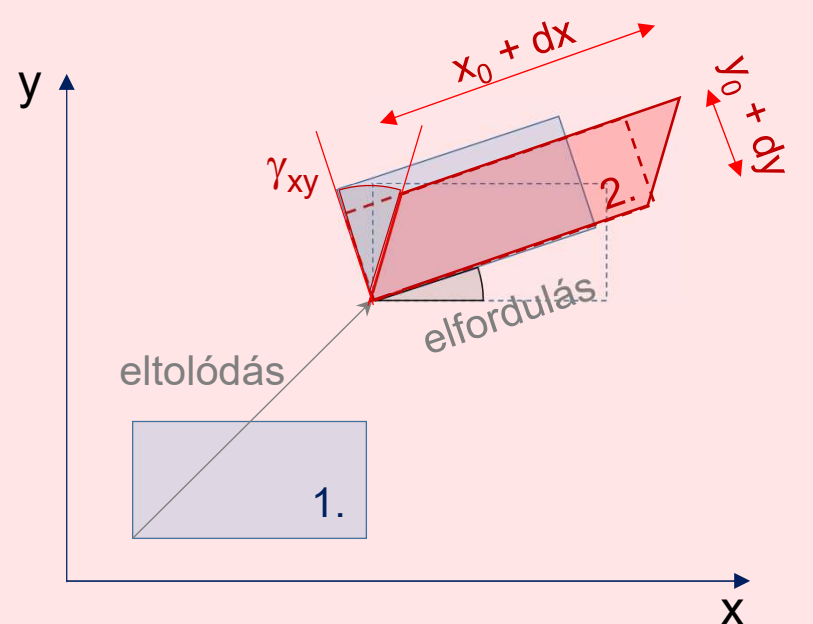
$$f_1 = \frac{5}{384} \frac{q \cdot l^4}{EI}$$

Pl. egy kéttámaszú acél tartó adott terhelés alatti lehajlását ki tudjuk számítani anélkül, hogy ismernünk kellene a testet felépítő atomok egymáshoz képest bekövetkező elmozdulását.

A **merev testet** az jellemzi, hogy pontjainak relatív távolsága a terhek hatására is változatlan marad. A merev testek **csak merevtestszerű elmozdulást** végeznek, amely egy eltolódás- és egy elfordulásvektorral jellemezhető.



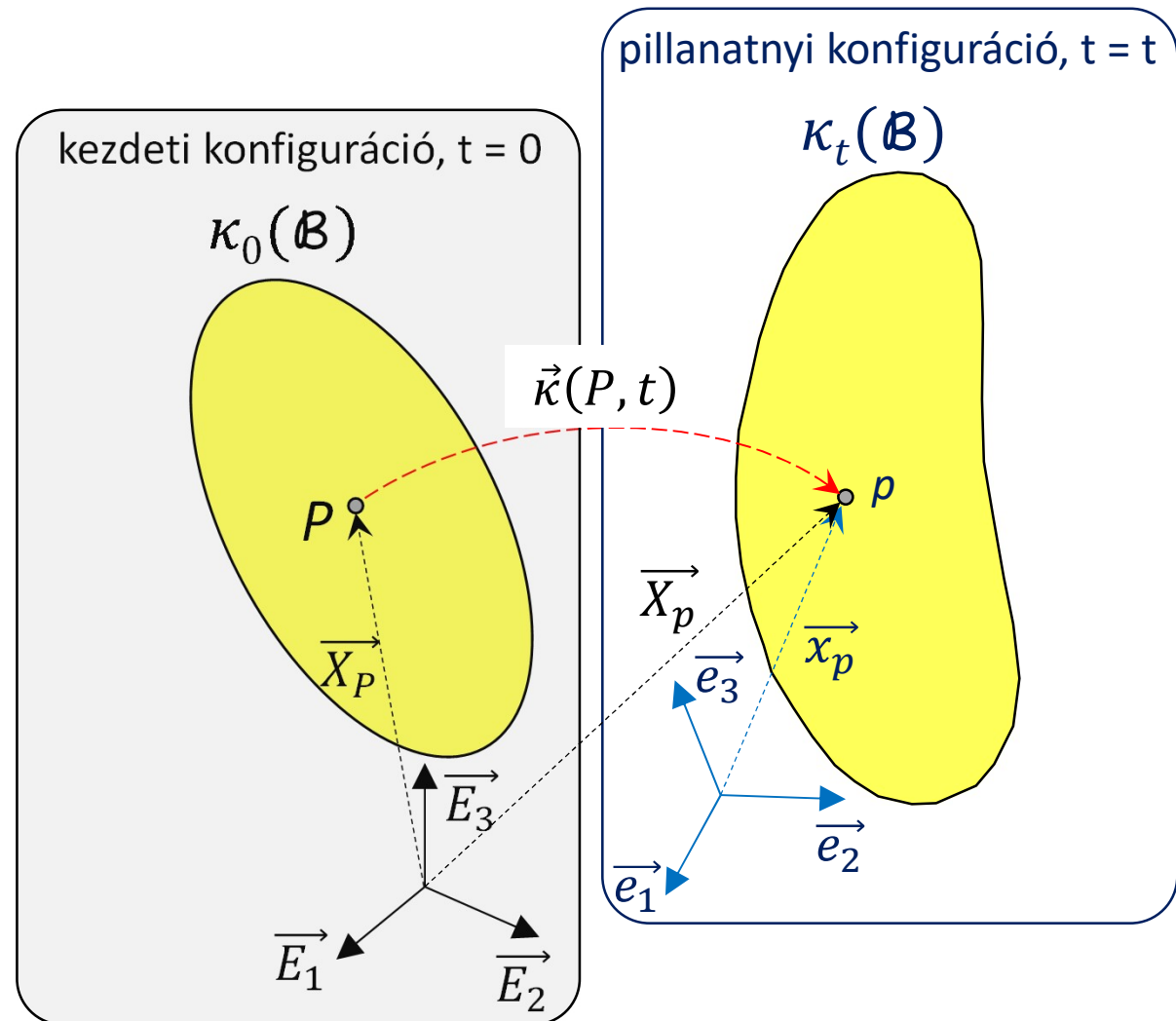
A **szilárd testek** a külső terhek hatására **alakváltozásokat** szenvednek, melyek következtében *mind pontjaik relatív távolsága, mind az irányok relatív szöge* megváltozik. Ezzel egyidejűleg a test még merevtest szerű elmozdulást is végez. A szilárd testek a merevtest szerű eltolódáson és elforduláson túl alakváltozásokat is szenvednek.



Egy adott t időpillanatban a P anyagi pontba mutató \vec{x} ("r") **helyvektor** a következő összefüggéssel írható fel:

$$\vec{x}(t) = x_i(t) \cdot \vec{e}_i(t)$$

$$\vec{x}(t) = \vec{\kappa}(P, t) = \vec{\kappa}_t(P)$$

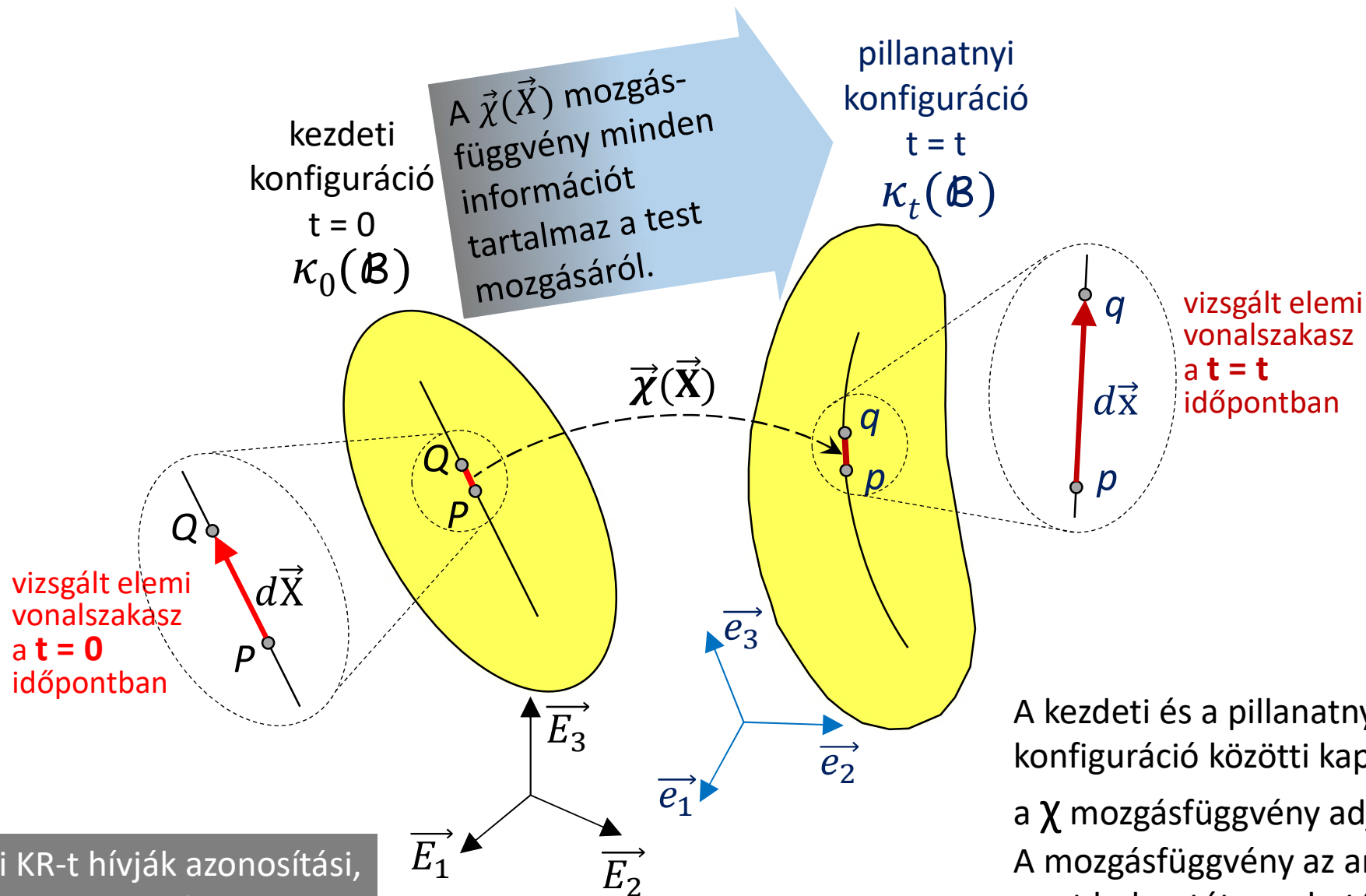


Tekintsünk egy test véges nagyságú tartományát, amelyet egy zárt felület határol. Ezt a tartományt, mint anyagi pontok halmazát jelöljük \mathcal{B} -vel. A \mathcal{B} egy tetszőleges anyagi pontját jelölje P ($P \in \mathcal{B}$). A háromdimenziós térben egy adott t időpillanatban minden anyagi ponthoz kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendelhető egy (x_1, x_2, x_3) számhármás, amelyet az anyagi pont koordinátáinak nevezünk. A számhármás egy hozzá kapcsolódó vonatkoztatási rendszerrel együtt adja meg az anyagi pont pontos helyét a t időpillanatban. A hozzárendelést/leképezést jelölje κ , így:

$$(x_1, x_2, x_3) = \kappa(P, t)$$

Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a tér, amelyben a test elhelyezkedik, euklideszi.

A vonatkoztatási rendszer legyen az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ nem egy síkba eső vektorokból álló vektorhármás, azaz bázisvektor rendszer.



A kezdeti KR-t hívják azonosítási, a pillanatnyi KR-t pedig vonatkoztatási KR-nek is.

A kezdeti és a pillanatnyi konfiguráció közötti kapcsolatot a χ mozgásfüggvény adja. A mozgásfüggvény az anyagi pont helyzetét meghatározó helyvektor-idő függvény.



A vizsgált rövid vonalszakaszok matematikailag vektorok (\vec{v}), melyeket a deformáció gradiens (F) transzformál (megnyújt, elforgat).

A kiinduló vektor – a pillanatnyi azaz azonosítási konfigurációban – megváltozását a pillanatnyi azaz vonatkoztatási konfigurációba tenzorok írják le, ezért a alakváltozási gradiens tenzor.

- A deformáció gradiensből származtathatók a lokális nyújtás, torzulás, terület- és térfogatváltozás mértékei.
- Általános esetben a deformáció gradiens a helytől és az időtől is függ.
- A deformáció gradiensnek nincs mértékegysége.

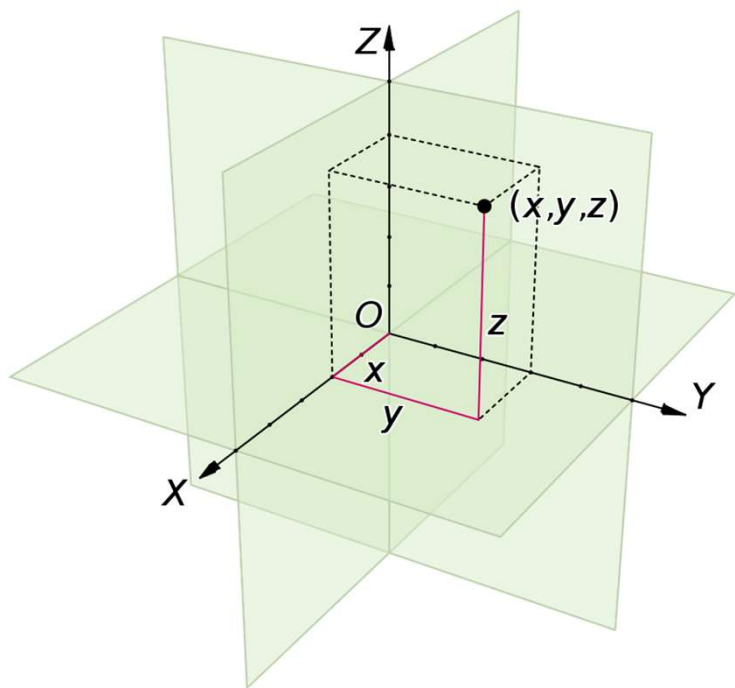
Vektor- és mátrixműveletek

Tenzoralgebra

Rövid ismétlés

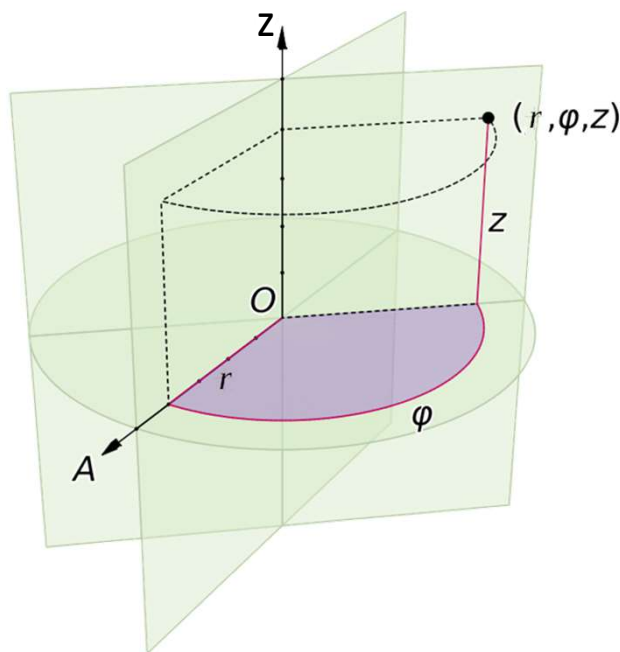
Descartes-féle
derékszögű
koordináta-rendszer

$$\mathbf{x}(x, y, z)$$



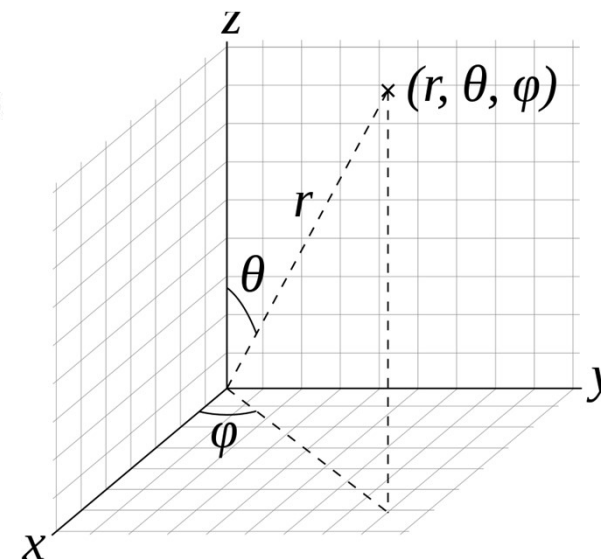
Henger
koordináta-rendszer

$$\mathbf{x}(r, \theta, z)$$

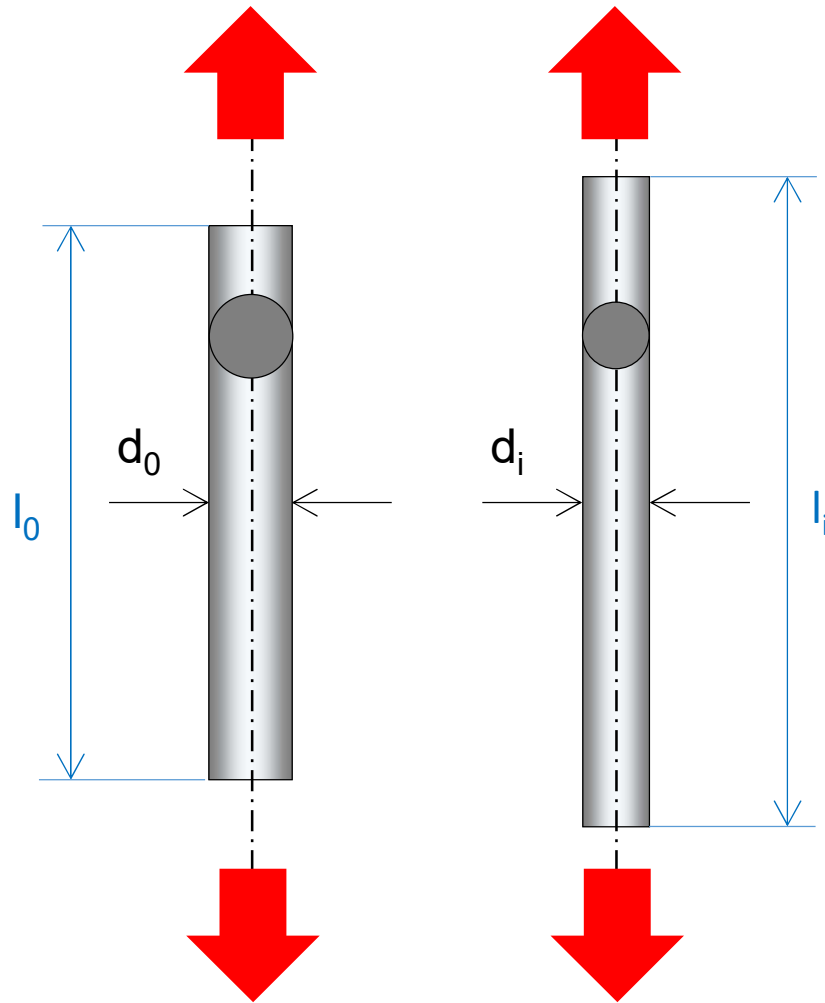


Gömb
koordináta-rendszer

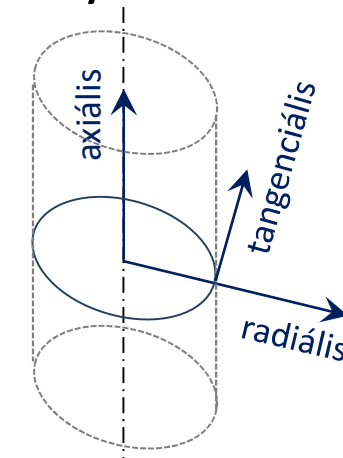
$$\mathbf{x}(r, \theta, \varphi)$$



Szakítóvizsgálat, egyenletes alakváltozások tartománya



I = axiális irány
 II = radiális irány
 III = tangenciális irány



Feszültségek

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{F}{A} = k_f \\ \sigma_r &= \sigma_t = 0 \end{aligned} \right\} k = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{k_f} = 1$$

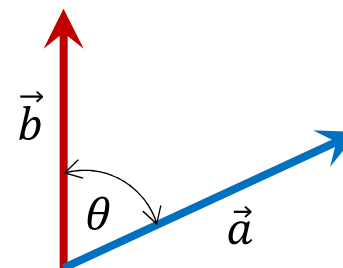
Alakváltozások

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a &= \ln \frac{l_1}{l_0} \\ \varphi_r &= \varphi_t = -\frac{1}{2} \varphi_a \end{aligned} \right\} \varphi_{\text{egyenértékű}} = \varphi_a$$

$$\bar{\varphi}_{\text{egyenértékű}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\phi_I^2 + \phi_{II}^2 + \phi_{III}^2)}$$

Skalárszorzat (kommutatív, disztributív)

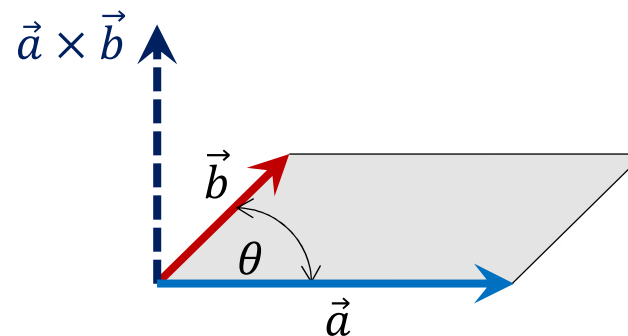
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$$



$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Vektoriális szorzat

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin\theta|$$



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

| Vektoros jelölés | Matematikai jelölés | Indexes jelölés |
|---|--|----------------------|
| $\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{bmatrix}$ | <p>Az összegzési jeleket elhagyjuk az áttekintés javítása érdekében, és helyette az azonos indexű tagok összegzést jelentenek.</p> | $c_i = a_i \pm b_i$ |
| <p>$\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{"skalár"}$</p> $c = \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ | $c = \sum_i a_i b_i$ | $c = a_i b_i$ |
| $ \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ | $a = \sqrt{\sum_i a_i^2}$ | $a = \sqrt{a_i a_i}$ |

| Vektoros jelölés | Matematikai jelölés | Indexes jelölés |
|--|--|-----------------------------------|
| $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$ | $c_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ | $c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ |

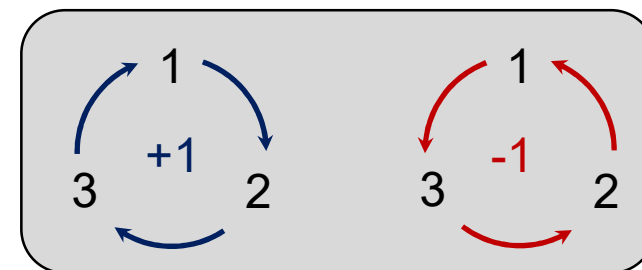
Az ε_{ijk} a Levi-Civita-szimbólum (nevét Tullio Levi-Civita olasz matematikusról kapta).

Ha az indexek értéke eltérő, a szimbólum azt jelzi, hogy páros, vagy páratlan számú indexcseré szükséges az értékek növekvő sorrendbe rendezéséhez.

$\varepsilon_{ijk} = 0$, ha két vagy több index azonos értékű, ha $i = j$, vagy $j = k$, vagy $i = k$.

$\varepsilon_{ijk} = 1$, ha i, j, k páros permutációja az 1, 2, 3-nak.

$\varepsilon_{ijk} = -1$, ha i, j, k páratlan permutációja az 1, 2, 3-nak.



$$A = \mathbf{A} = \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{i=1..m; j=1..n} = \boxed{a_{ij}}$$

Összeadás (asszociatív, kommutatív)

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij} + b_{ij})_{i=1..m; j=1..n} = \boxed{a_{ij} + b_{ij}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -3+3 & 2+5 \\ 1+2 & 2+1 & 7+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Szorzás skalárral (asszociatív, kommutatív)

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{i=1..m; j=1..n} = \boxed{\lambda \cdot a_{ij}}$$

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-3) & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 5 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

Mátrix szorzása oszlopvektorral

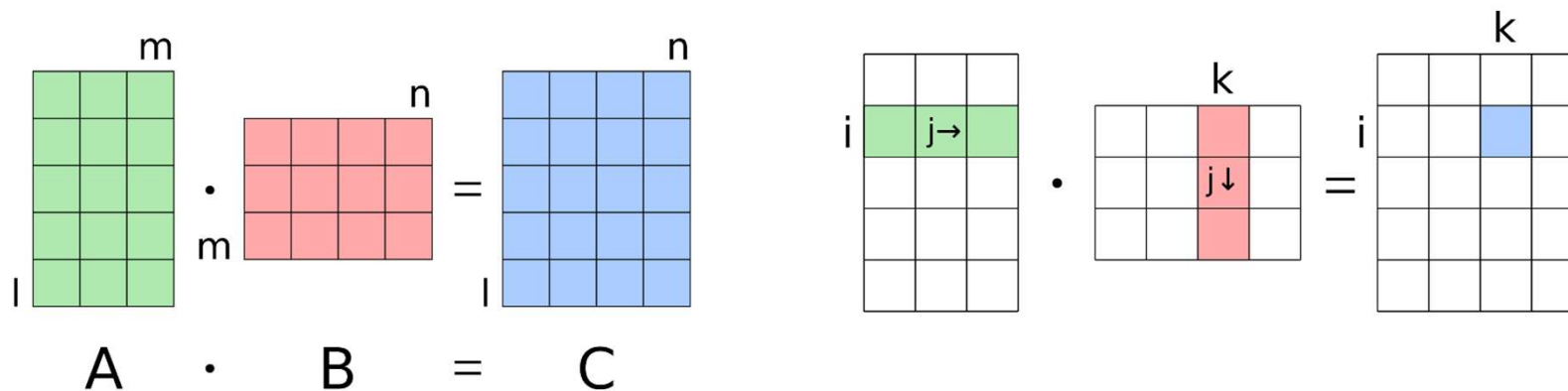
$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}a_1 + t_{12}a_2 + t_{13}a_3 \\ t_{21}a_1 + t_{22}a_2 + t_{23}a_3 \\ t_{31}a_1 + t_{32}a_2 + t_{33}a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 t_{1i} a_i \\ \sum_{i=1}^3 t_{2i} a_i \\ \sum_{i=1}^3 t_{3i} a_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= t_{1k} a_k \\ d_2 &= t_{2k} a_k \rightarrow d_i = t_{ij} a_j \\ d_3 &= t_{3k} a_k \end{aligned}$$

Mátrix szorzása mátrixszal (asszociatív, disztributív)

Másodrendű tenzorok szorzata

Két mátrix szorozásához az első mátrixban lévő oszlopok számának meg kell egyeznie a második mátrixban lévő sorok számával.



$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C_{l \times n} = A_{l \times m} \cdot B_{m \times n}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{jk}$$

$$c_{ik} = a_{ij} \cdot b_{jk} \quad !$$

Mátrix szorzása mátrixszal (asszociatív, disztributív)
 Másodrendű tenzorok szorzata

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \boxed{t_{im}c_{mj}}$$

$$A_{12} = T_{1m}C_{m2} = T_{11}C_{12} + T_{12}C_{22} + T_{13}C_{32} = \sum_{m=1}^3 T_{1m}C_{m2}$$

...

Negyedrendű és másodrendű tenzorok szorzata

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \sigma_{ij} = \boxed{C_{ijkl} \varepsilon_{kl}} \quad !$$

két másodrendű tenzor közötti kapcsolat

Szám példa mátrix-mátrix szorzására

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

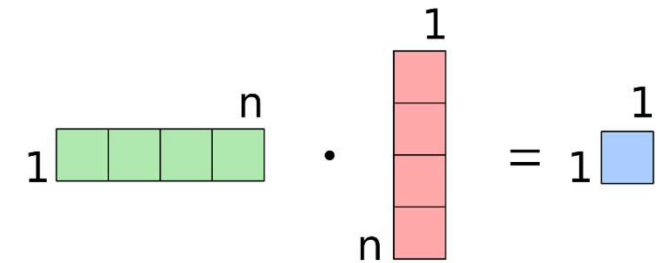
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

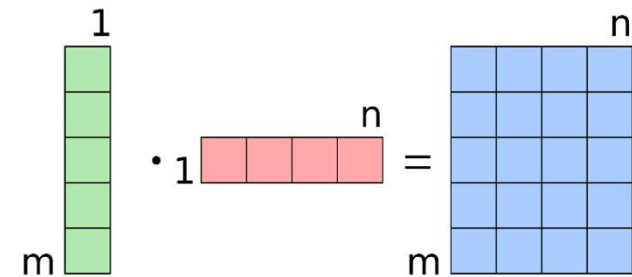
Sorvektor szorzata oszlopvektorral

Mindkét vektornak azonos elemszámúnak kell lennie, és az eredmény egy valós szám.

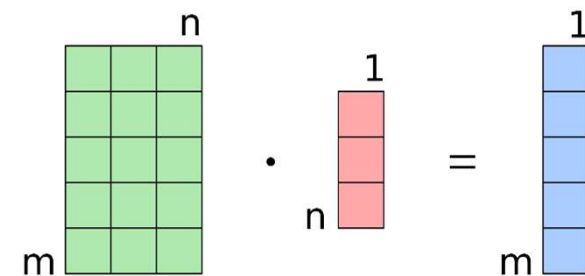


Oszlopvektor szorzata sorvektorral

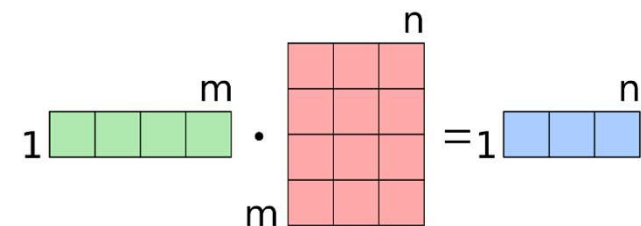
A diádikus szorzat eredménye egy mátrix, vagy másodrangú tenzor.



Mátrix szorzata oszlopvektorral



Sorvektor szorzata mátrixszal



Mátrix transzponáltja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{i=1..m; j=1..n}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ji})_{j=1..n; i=1..m}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Inverzmátrix

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I = E$$

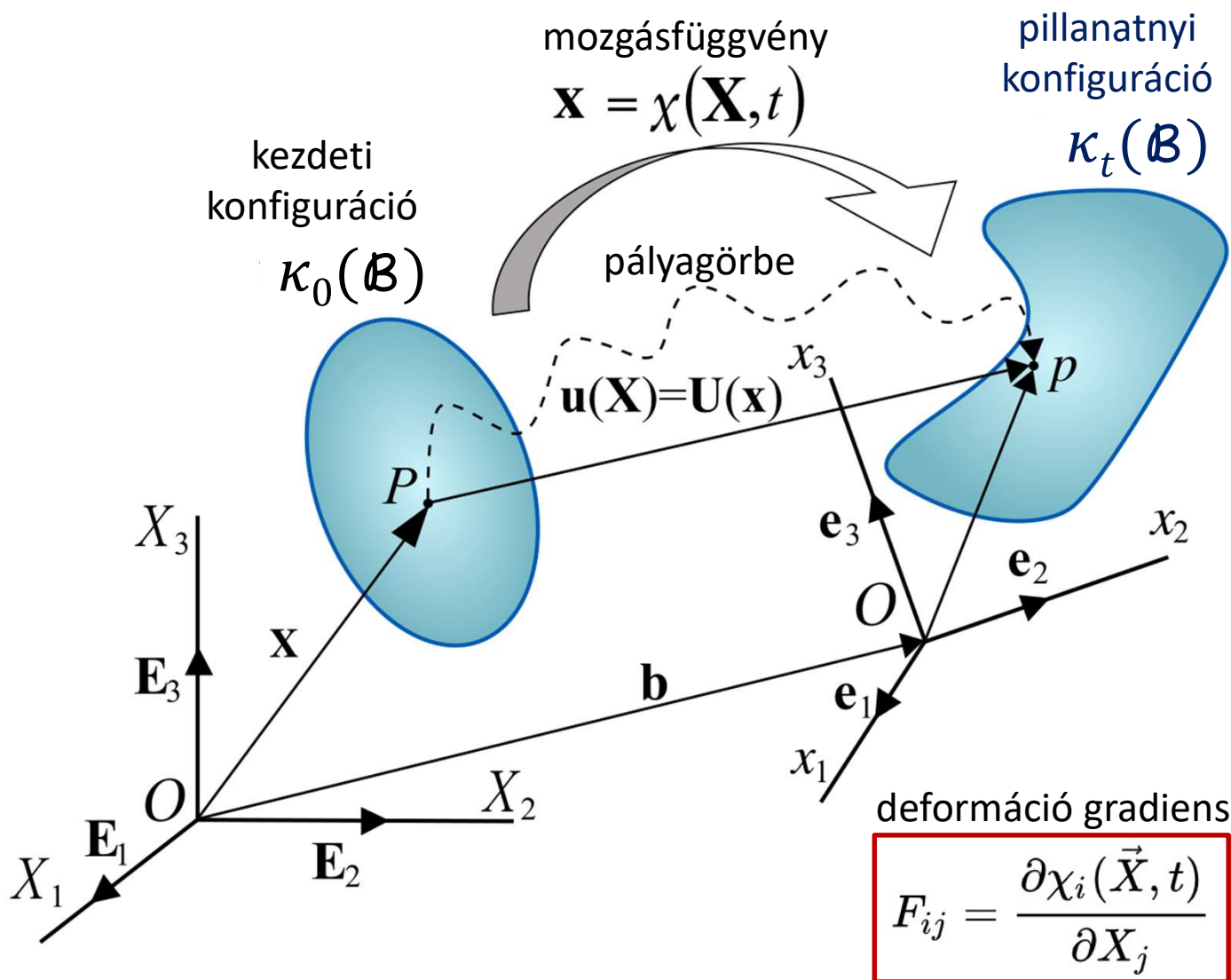
Ha egy **A** négyzetmátrix determinánusa nem egyenlő nullával, akkor invertálható.

Egységmátrix

$$I = E = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -1+1 \\ 12-12 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Deformáció gradiens



Egy kontinuumként értelmezett testben bekövetkezett változás egy elmozdulási mezővel írható le. Az elmozdulási mező a testet alkotó összes részecskére vonatkozó összes elmozdulási vektor vektormezője, amely a deformált konfigurációt a deformálatlan konfigurációval hozza összefüggésbe.

Bármely két részecske távolsága akkor és csak akkor változik, ha deformáció történt. Ha az elmozdulás deformáció nélkül történik, akkor merev test szerű elmozdulásról van szó.

A pályagörbe az a térgörbe melyen az anyagi pont a mozgás során végighalad.

Elmozdulás: Egy kiválasztott anyagi pont t időponthoz tartozó elmozdulását megadó vektor.

$$u_i = x_i(X_i, t) - X_i \quad \text{vagy} \quad \mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$$

Vonalelem alakváltozása

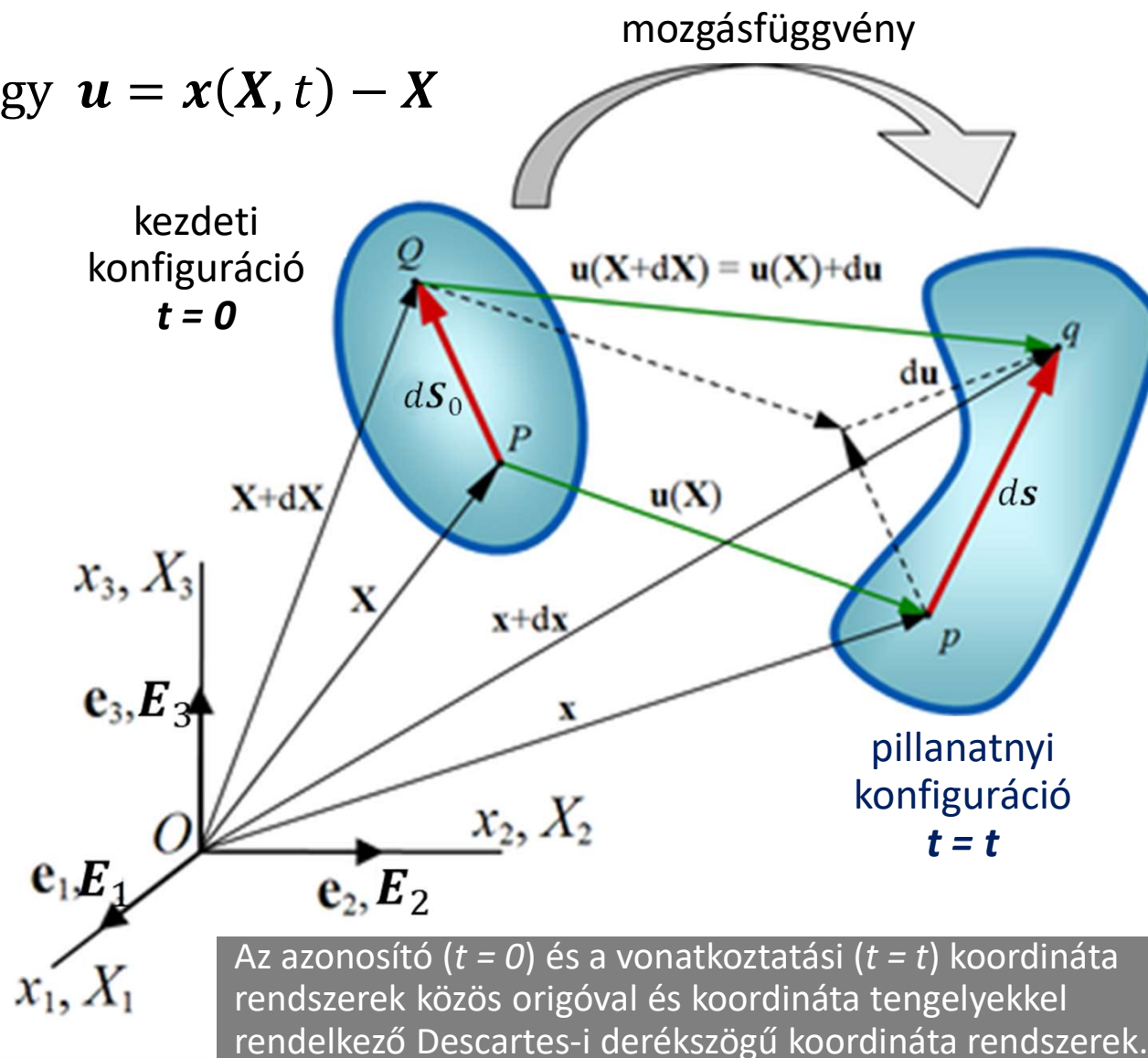
$$d\mathbf{S}_0 \rightarrow d\mathbf{s}$$

Alakváltozási gradiens

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} = F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$



A mozgásfüggvény adja meg a kapcsolatot az anyagi pont kezdeti és pillanatnyi helyzete között.

\mathbf{X} – kordináták a kezdeti/azonosító rendszerben
 \mathbf{x} – kordináták a pillanatnyi/vonatkoztatási rendszerben

$$x_i = x_i(X_i, t) \text{ vagy } \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 &= x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 &= x_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{aligned}$$

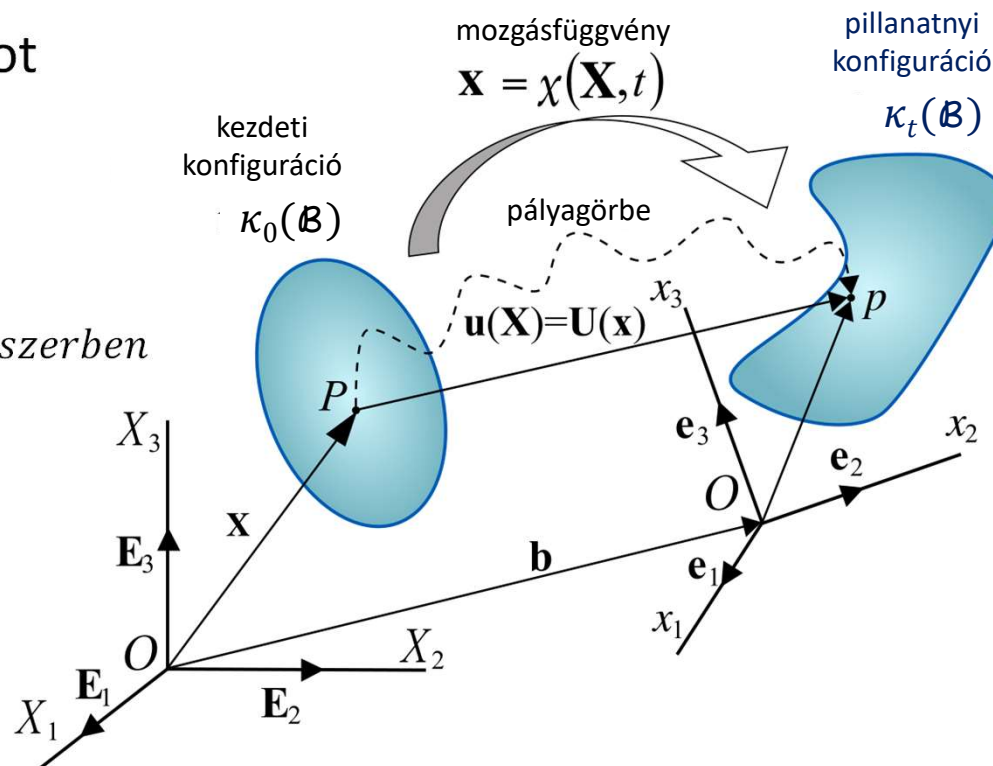
$$\frac{\partial x_1}{\partial X_1} = \frac{\partial x_1(X_1, X_2, X_3, t)}{\partial X_1}$$

..

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i(X_1, X_2, X_3, t)}{\partial X_j}$$

..

parciális
deriváltak



Inverz mozgásfüggvény

$$X_i = X_i(x_i, t) \text{ vagy } \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ X_2 &= X_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ X_3 &= X_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned}$$

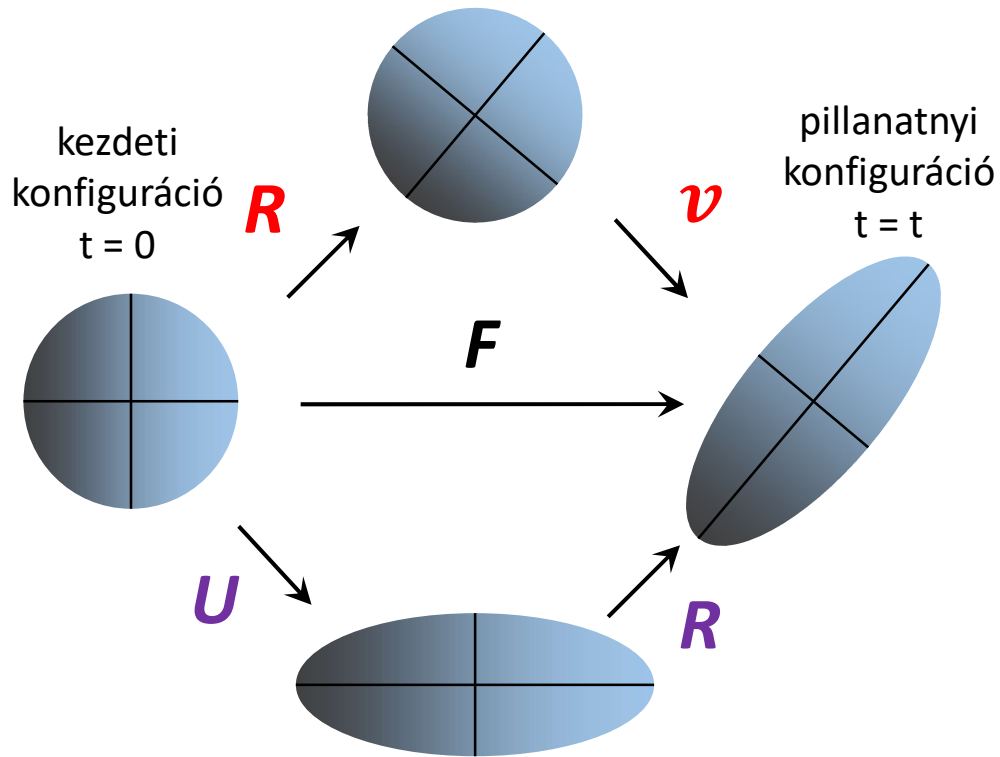
Legyen \mathbf{F} egy valós, nem elfajuló tenzor ($\det \mathbf{F} > 0$). Ekkor \mathbf{F} mindig felbontható egy \mathbf{R} ortogonális transzformáció (vagy tenzor), és egy \mathbf{U} vagy \mathbf{v} szimmetrikus, pozitív definit nyújtástenzor szorzatára a következő módon:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}$$

A mozgásfüggvény $\vec{\chi}(\vec{X})$ minden információt tartalmaz a vizsgált test mozgásáról.

Az \mathbf{F} deformáció gradiens a mozgásfüggvény $\vec{\chi}(\vec{X})$ deriválásával áll elő, tehát a $\vec{\chi}(\vec{X})$ mozgásfüggvényben lévő konstansok, amelyek a test pontjainak helyét határozzák meg, eltűnnek. Ezekre az alakváltozások leírásához nincs is szükség, ugyanis ezek a test merevtest szerű transzlációs mozgásával kapcsolatosak (\mathbf{U} , \mathbf{v}). Van még egy másik merev test szerű mozgással kapcsolatos információ is a deformáció gradiensben, amelyet célszerű leválasztani róla. Ez a merev test szerű elfordulás, vagy rotáció (\mathbf{R}).



$$F = \underbrace{R \cdot U}_{\text{Lagrange-perspektíva}} = \underbrace{v \cdot R}_{\text{Euler-perspektíva}}$$

Az R ortogonális transzformáció, az elemi térfogat merev test szerű elfordulását írja le.

Az U szimmetrikus, pozitív definit tenzort jobboldali vagy **anyagi nyújtástenzornak** nevezzük.

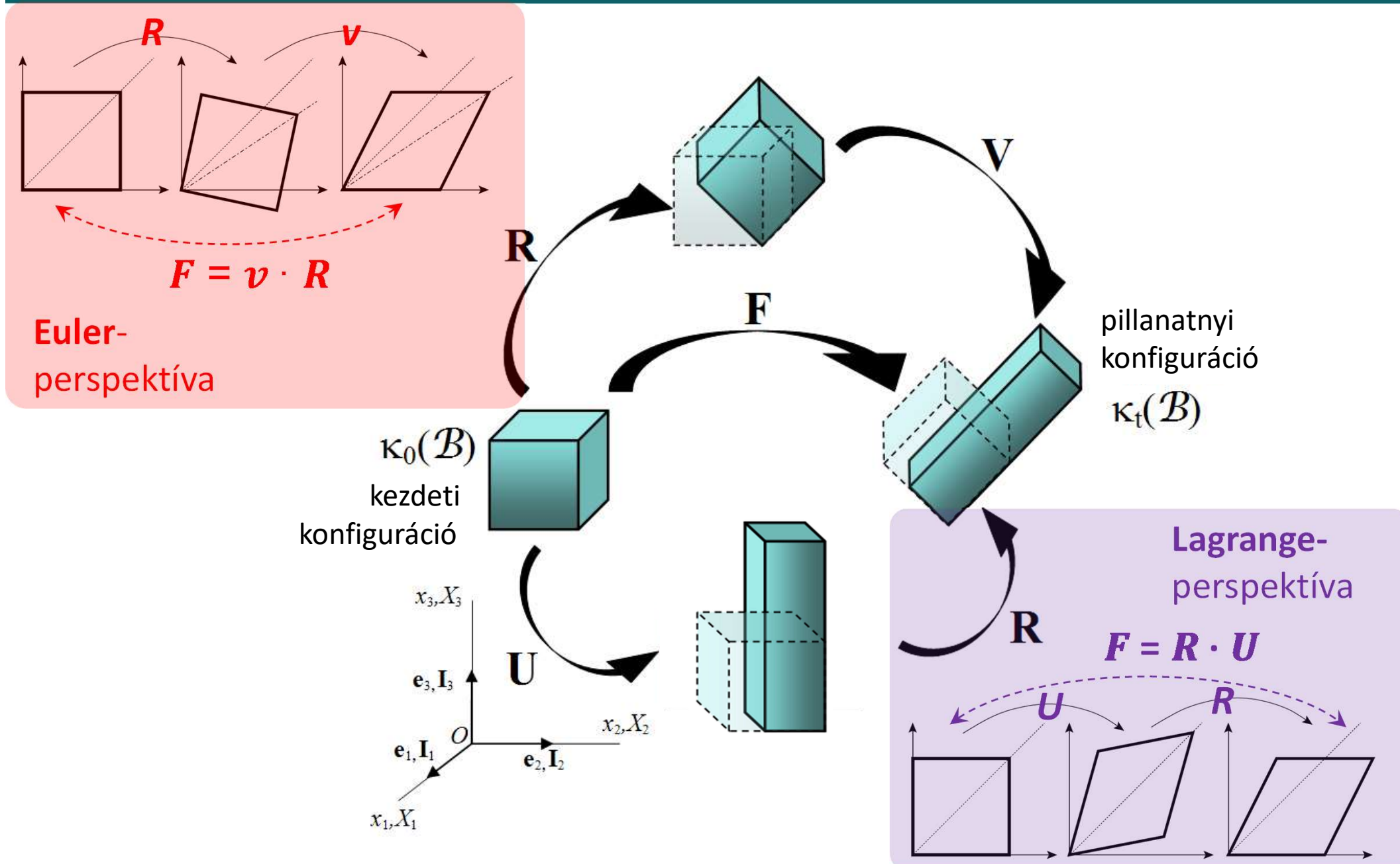
A jobboldali jelző arra utal, hogy **az R forgató tenzort jobbról szorozzuk az U tenzonnal.**

Az anyagi jelző arra utal, hogy az U tenzor a kezdeti konfigurációban értelmezett.

A v szimmetrikus, pozitív definit tenzort baloldali vagy **térbeli nyújtástenzornak** nevezzük.

A baloldali jelző arra utal, hogy **az R forgató tenzort balról szorozzuk a v tenzonnal.**

A térbeli jelző arra utal, hogy az v tenzor a pillanatnyi konfigurációban értelmezett.



A Lagrange-perspektívában a test mozgását annak egyik anyagi pontjáról (részecske) elemzi, ezért ezt a perspektívát anyagi perspektívának is nevezik.

Arra a kérdésre tudunk válaszolni, hogy pl. milyen nyomás/hőmérséklet van a test egy adott pontjában.

A Lagrange-féle megközelítést a szilárdtest mechanika a kis és nem túl nagy alakváltozásokhoz alkalmazza.

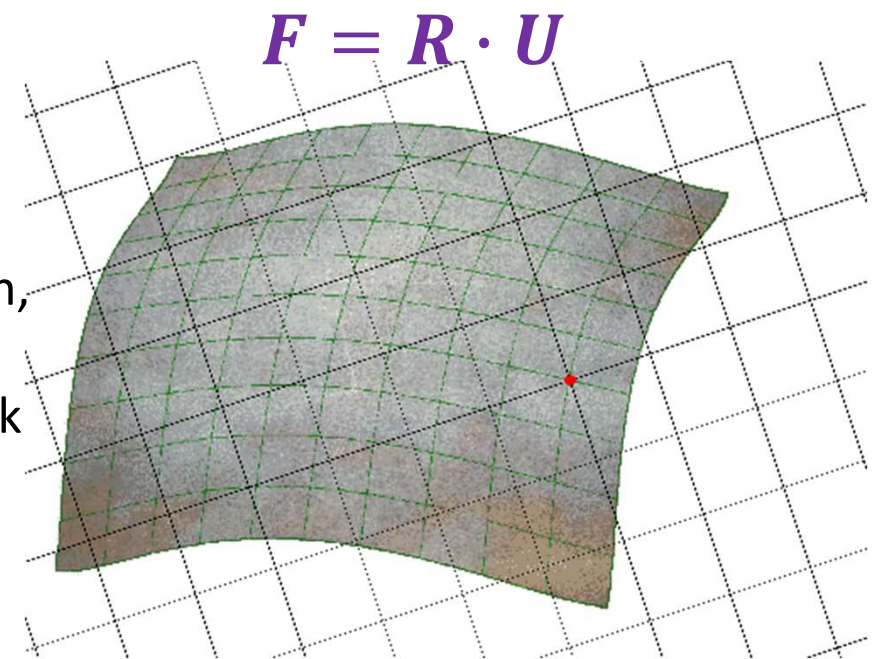
A Lagrange-féle megközelítésben az összes fizikai mennyiséget a kezdeti konfigurációhoz viszonyítunk.

Előny

A szabad felületekre vonatkozó kényszerek megadása nem okoz nehézséget. Kis alakváltozások és lineáris anyagviselkedés esetén, az egyenletek oly módon egyszerűsödnek, hogy számos fontos problémára analitikus megoldások állnak rendelkezésre, illetve levezethetők.

Hátrány

A kezdeti konfigurációra való hivatkozás miatt a nagy alakváltozások jelentős számításbeli nehézséget okoznak.



Euler-féle nézőpont a test mozgását egy a térben rögzített pontból elemzi, ezért ezt a nézőpontot térbelinek vagy lokálisnak nevezzük.

Arra a kérdésre tudunk válaszolni, hogy pl. milyen nyomás/hőmérséklet uralkodik a tér egy bizonyos helyén.

Az Euler-perspektívában minden fizikai mennyiséget a pillanatnyi konfigurációhoz viszonyítunk.

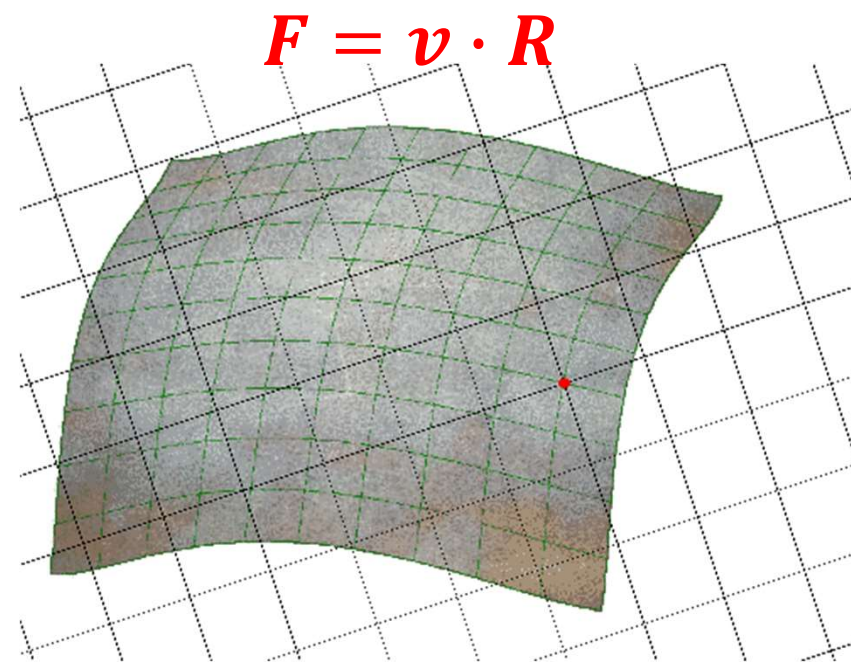
Előny

Nagy alakváltozások leírására előnyös.

Hátrány

A deformálatlan kezdeti állapot gyakran nem ismert.

A peremfeltételek megfogalmazása a szabad felületeken nehézségeket okoz.



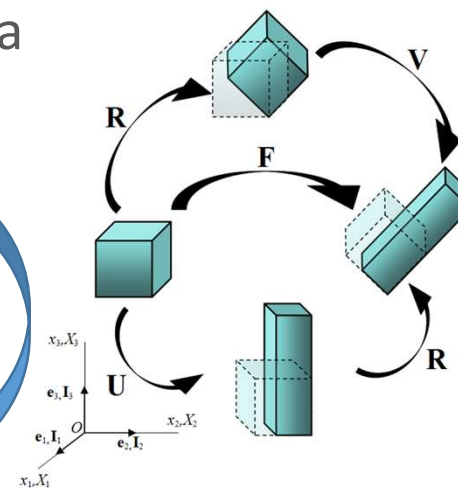
Ha megszorozzuk az F deformáció gradienst balról a saját maga transzponáltjával, és alkalmazzuk a poláris felbontását

$$F^T \cdot F = U^T \cdot R^T \cdot R \cdot U = U^2$$

$I = E = \text{egységtenzor}$

Lagrange $F = R \cdot U$

A jobboldali/anyagi nyújtástenzor felírható: $U = \sqrt{F^T \cdot F}$



Euler $F = v \cdot R$

A baloldali/térbeli nyújtástenzor felírható: $v = \sqrt{F \cdot F^T}$

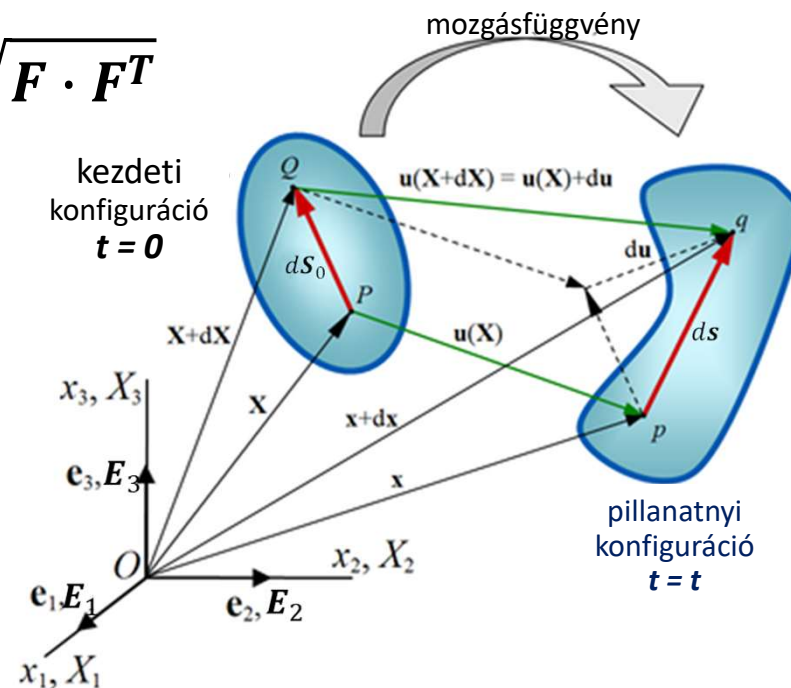
$$U^2 = F^T \cdot F = C$$

$$v^2 = F \cdot F^T = B$$

Cauchy-Green-féle
deformációs
tenzorok (C, B)

A forgató tenzor felírható

$$R = F \cdot U^{-1} = v^{-1} \cdot F$$



Alakváltozás

A térfogat változása, térfogatállandóság

$$\varepsilon_v = \frac{dv - dV_0}{dV_0}$$

$$\varepsilon_v = \det \mathbf{F} - 1 \quad J = \det \mathbf{F} = 1 = \textit{konstans}$$

Térfogatállandóság,
összenyomhatatlan anyag.

Langrange alakváltozási tenzor

A Lagrange megközelítésben az összes fizikai mennyiséget a kezdeti konfigurációhoz viszonyítjuk.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad \textit{vagy} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right)$$

I – egységtenzor

δ_{ij} Kronecker-szimbólum Értéke
1, ha a két szám egyenlő,
minden más esetben 0.

Euler alakváltozási tenzor

Az Euler-perspektívában minden fizikai mennyiséget a pillanatnyi konfigurációhoz viszonyítunk.

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \quad \textit{vagy} \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \underbrace{\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}}_{\textit{inverz mozgásfüggvényből(!)}} \right)$$

inverz mozgásfüggvényből(!)

Az alakváltozás a test terhelés alatti és terheletlen állapotában mérhető méreteinek különbsége.

Nyúlás

$$\lambda = \frac{ds}{dS_0}$$

vonalelem hossza a pillanatnyi konfigurációban, vonatkoztatási KR

vonalelem hossza a kezdeti konfigurációban, azonosító KR

MéRNÖKI alakváltozás

$$\varepsilon^{\text{mérnöki}} = \frac{ds - dS_0}{dS_0} = \frac{\Delta l}{l}$$

Langrange alakváltozás

$$\varepsilon^{\text{Lagrange}} = \frac{ds^2 - dS_0^2}{2dS_0^2}$$

kezdeti konfiguráció

Euler alakváltozás

$$\varepsilon^{\text{Euler}} = \frac{ds^2 - dS_0^2}{2ds^2}$$

pillanatnyi konfiguráció

Egy anyagi pont környezetében kijelölt gömb, az alakváltozás során ellipszoiddá transzformálódik.

A főirányok koordinátarendszerében:

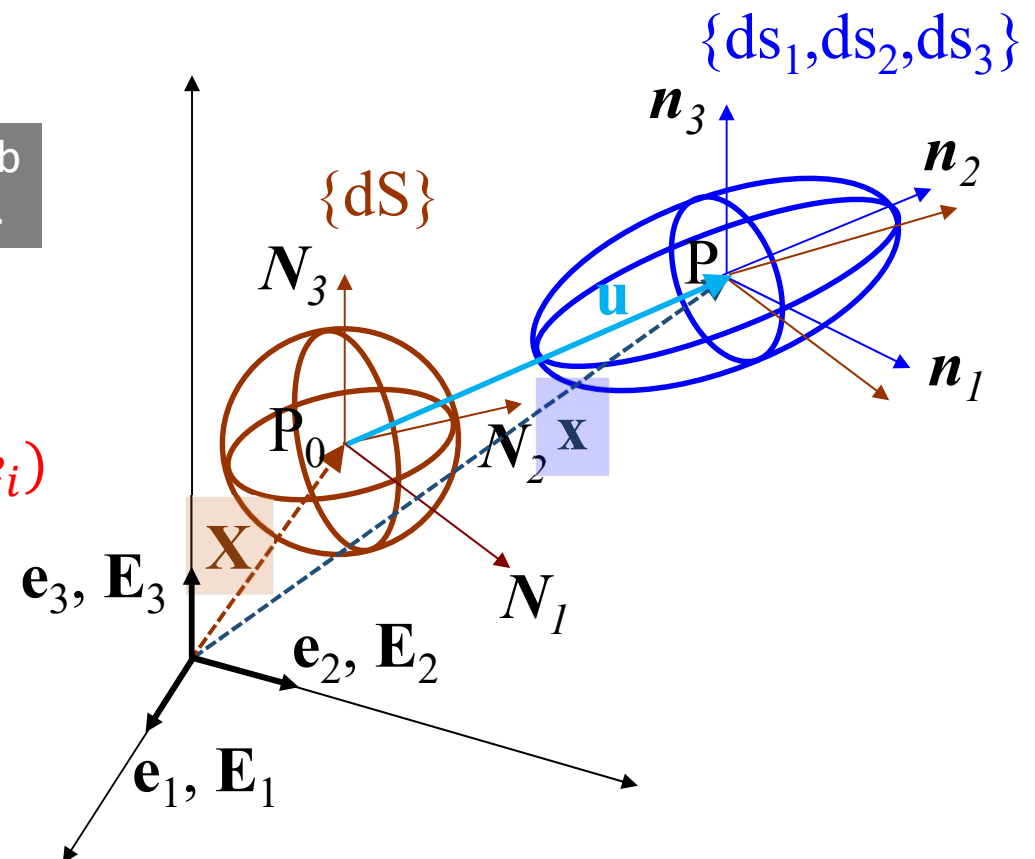
$$\varphi_i = \ln \frac{ds_i}{dS}$$

Mindig a kiinduló gömb sugarával (dS) osztunk.

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$$

$$\varphi_i = \frac{1}{2} \ln(1 + 2E_i) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2e_i)$$

Ahol \mathbf{E}_i a Lagrange tenzor és \mathbf{e}_i az Euler tenzor főértéke.



dS – a gömb sugara

ds_i – az ellipszoid féltengelyei

$$\varphi_{\text{egyenértékű}} = \varphi_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} (\varphi_I^2 + \varphi_{II}^2 + \varphi_{III}^2)}$$

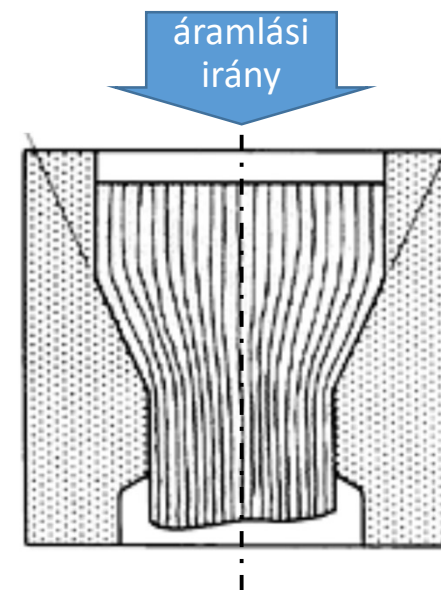
Sebességmező

Az alakváltozás leírása a sebességmező segítségével

A test alakváltozási állapota leírható akkor is ha a mozgásfüggvény nem ismert, de a test sebességállapotát ismerjük.

$$v_i = v_i(x_i, t) \text{ vagy } \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

Egy térbeli pontban (nem anyagi pont) mutatja a sebességet a t időben.



Sebesség gradiens Egy térbeli pont közvetlen környezetében a sebességmező változását mutatja.

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}$$

$$\text{vagy } \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i(X, t)}{\partial X_j}$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$$

Ha a sebesség két közeli anyagi pont között nem változik egy koordináta irányban, akkor ott nincs alakváltozás.

Hasonlóan az alakváltozási gradienshez (F) a sebességgradiens (L) is két részre bontható

Az alakváltozási **sebességtenzor**

Az **örvénytenzor**, ami a merevtest szerű forgás sebességét adja meg

Összenyomhatatlanság

Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben

Hengerkoordináta-rendszerben

$$L = D + W$$

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T)$$

$$W = \frac{1}{2}(L - L^T)$$

$$F = R \cdot U$$

$$F = v \cdot R$$

$$U = \sqrt{F^T \cdot F}$$

$$v = \sqrt{F \cdot F^T}$$

R

$$\operatorname{div} v = 0$$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

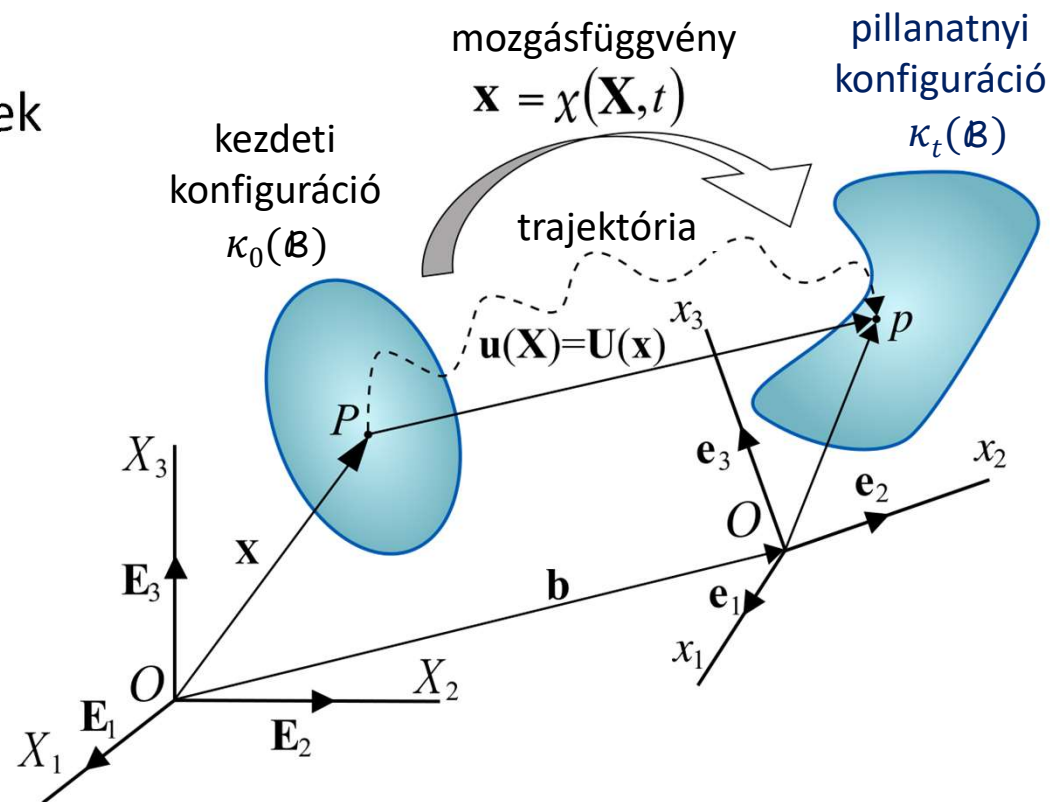
Alakváltozás

Egyenértékű alakváltozási sebesség

$$\dot{\varphi}_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + (D_{11} - D_{33})^2 + (D_{22} - D_{33})^2 + 6(D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{23}^2)}$$

Az egyenértékű alakváltozás mértéke kiszámítható az alakváltozási sebességnek az alakítási trajektória mentén számolt integráljával.

$$\varphi_{eq} = \int_0^t \dot{\varphi}_{eq}(t) \cdot dt$$



Végeselem-módszer

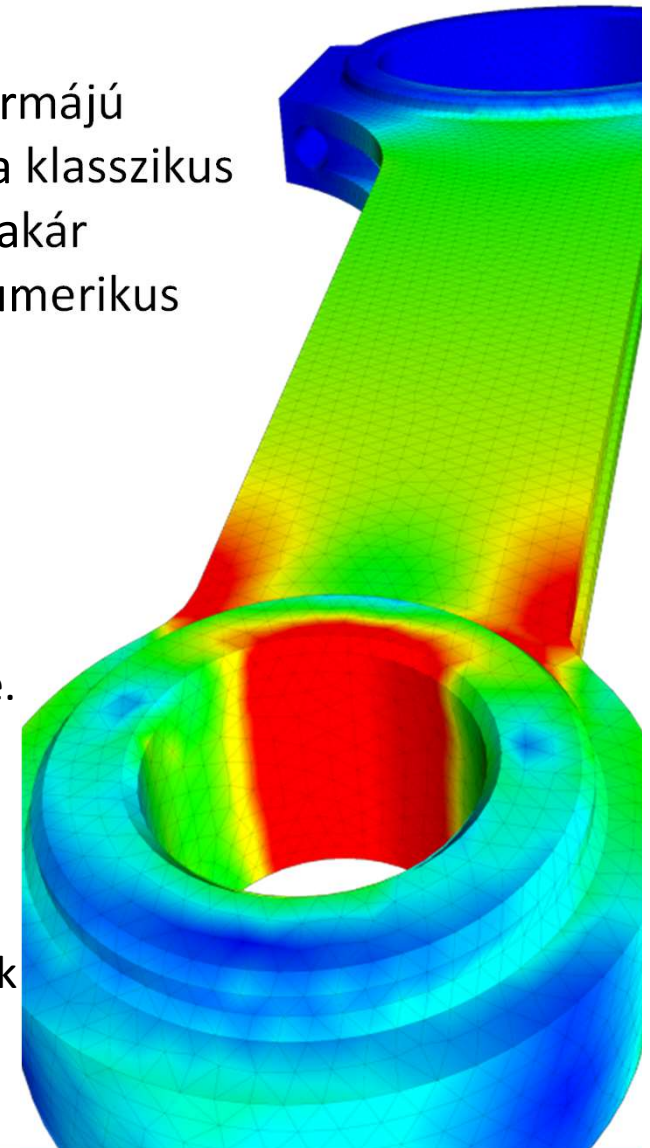
A **végeleemes módszer (VEM, FEM)** és a végeelem-elemzés (**VEE, FEA**) egy általános numerikus módszer, amely különféle fizikai feladatok megoldásához használható.

A VEM alkalmazása a legelterjedtebb geometriailag összetett formájú szilárd testek szilárdsági és alakváltozási elemzésében, mert itt a klasszikus módszerek (pl. gerendaelmélet) alkalmazása túl bonyolult vagy akár lehetetlen. A FEM egy komplex differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldásán alapul.

A számítási terület (alkatrész) véges számú részterületre van felosztva, melyet síkbeli problémáknál pl. háromszögek vagy négyszögek, térbeli problémáknál hasábok vagy tetraéderek alkotnak. Ezek a „véges elemek”. Ezek az elemek ugyan kicsik, de tényleges méretük matematikailag releváns, ezért méretük befolyással van az eredményre. A végtelenül kis elemek mérete elhanyagolható lenne, és többé nem kellene figyelembe venni az egyenletekben.

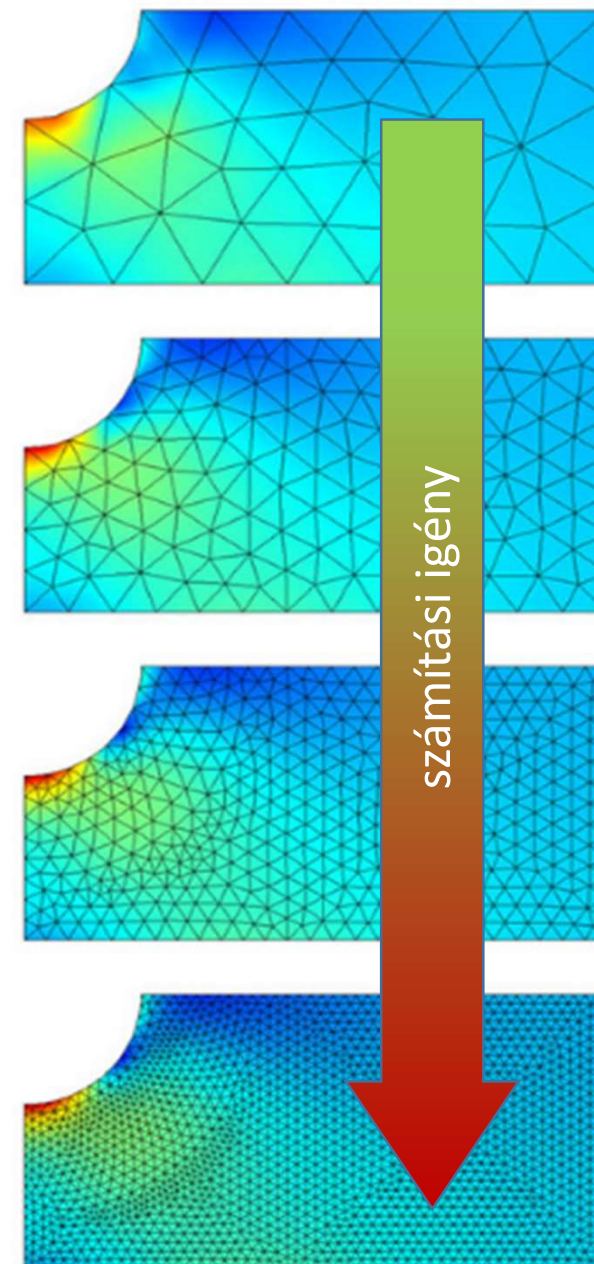
Az elemek egyszerű geometriájának köszönhetően fizikai viselkedésük jól ismert függvényekkel könnyen számítható.

Az egész test fizikai viselkedését az határozza meg, hogy ezek az elemek hogyan reagálnak a terhelésekre és peremfeltételekre, és hogyan terjednek a terhek és reakciók az egyik elemről a másikra.



A hálózást úgy célszerű kialakítani a vizsgált darabon, hogy azokon a részeken, ahol a megoldás szempontjából kritikus lehet az eredmény, ott sűrűbb, kisebb a hálóméretet választunk, ahol pedig a változások várhatóan kisebb mértékűek lesznek, ott nagyobb méretű elemeket használunk.

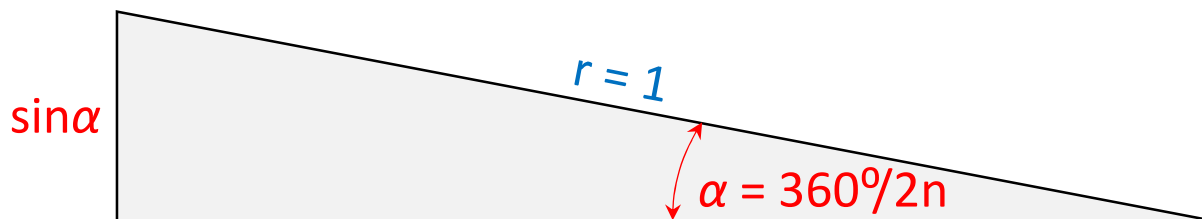
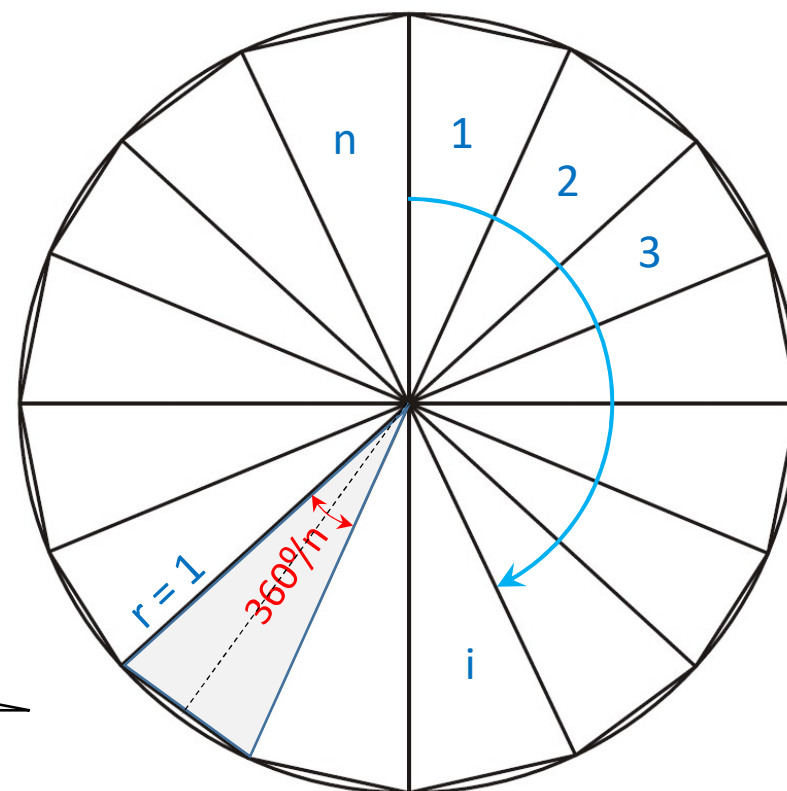
A modellben az elemek csak sarokpontjaikon (csomópontjaikon) csatlakoznak egymáshoz. Ezek a csomópontok alkotják a numerikus módszer diszkrét részalmazát. A csomópontokon az elemekre ható erők és a csomópontok elmozdulása között a Hooke-törvényt követő anyag esetén lineáris összefüggés van. A felosztás finomsága, azaz a hálózat sűrűsége, jelentősen befolyásolja a közelítő számítás eredményeinek pontosságát. Mivel a finomabb/sűrűbb hálózatok használatakor megnő a számítási igény, fontos a hálózatoptimalizáló megoldások fejlesztése.



Ókori alkalmazás

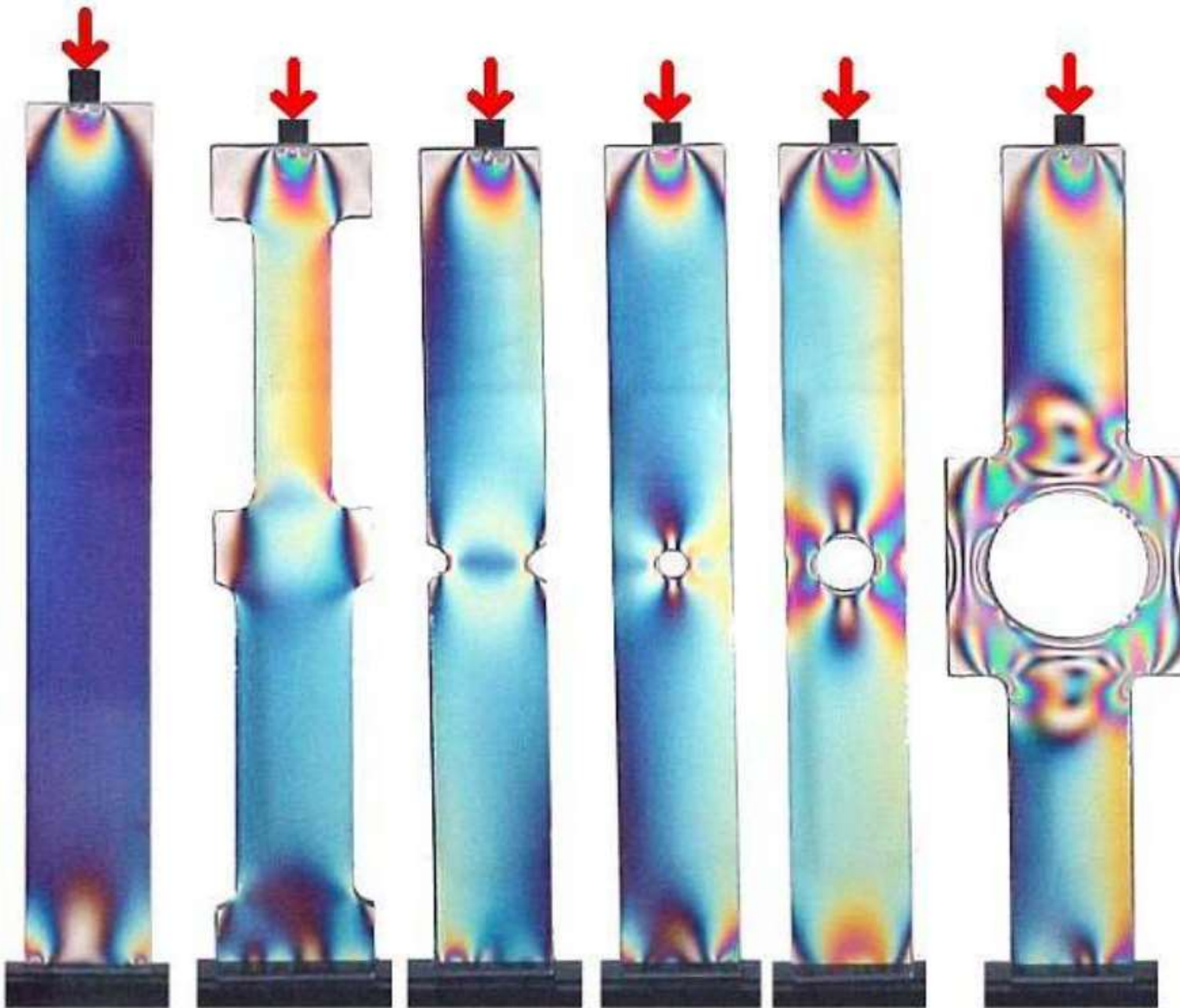
Véges elemek alkalmazásával bonyolult és az adott körülmények között nem megoldható feladatokat egyszerűsítünk le.

Az egyszerűsítés alapja, hogy pl. a test geometriáját véges számú kisebb, egyszerűbb alakú elemre bontjuk és azokon végzünk számításokat. Így a kevesebb, de bonyolultabb számítás helyett több, de egyszerűbb számítást kell elvégezni.



A kör kerülete: $\underbrace{2n \sin \alpha}_{\text{közeli\~o\ e\~rt\~ek}} = \underbrace{2r \pi}_{\text{pontos e\~rt\~ek}}$

| n | 10 | 20 | 30 | 60 | 120 | 360 |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| α | 18° | 9° | 6° | 3° | 1,5° | 0,5° |
| $\pi_{\text{k\~ozeli\~o}}$ | 3,09017 | 3,12869 | 3,13585 | 3,14016 | 3,14123 | 3,14155 |



Saint-Venant a lokális hatások elve

„Valamely test vagy szerkezet egy bizonyos szakaszára a működő teher eloszlásának módja lényeges mértékben befolyásolja a teher közvetlen környezetében létrejövő feszültségek és alakváltozások eloszlását, azonban elenyésző hatást gyakorol a távolabbi részek feszültségi és alakváltozási állapotára.”

Köszönöm a figyelmet!

Katula Levente

katula.levente@gpk.bme.hu

- <https://www.continuummechanics.org>
- Kozák Imre, Szeidl György, Tenzorszámítás indexes jelölésmódban
- Han-Chin Wu: Continuum Mechanics and Plasticity
- Continuum Mechanics Examples by Dr. Attila Kossa

Deformáció gradiens

$$\mathbf{F} = F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial X_1} = \frac{\partial x_1(X_1, X_2, X_3, t)}{\partial X_1}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad \text{Lagrange-perspektíva}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \quad \text{Euler-perspektíva}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{v}^{-1} \cdot \mathbf{F}$$

forgató tenzor

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$$

anyagi nyújtástenzor

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

térbeli nyújtástenzor

Langrange alakváltozási tenzor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad \text{vagy} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right)$$

Euler alakváltozási tenzor

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \quad \text{vagy} \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right)$$

Egyenértékű alakváltozás
a főalakváltozások terében

$$\varphi_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}(\varphi_I^2 + \varphi_{II}^2 + \varphi_{III}^2)}$$

inverz
mozgásfüggvényből

Sebesség gradiens

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i(x, t)}{\partial x_j} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}(x, t)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Egy térbeli pont közvetlen környezetében a sebességmező változását mutatja.

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

alakváltozási
sebességtenzor

örvénytenzor, ami a merevtest szerű
forgás sebességét adja meg

összenyomhatatlanság $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x_1} + \frac{\partial v_y}{\partial x_2} + \frac{\partial v_z}{\partial x_3}$

Egyenértékű alakváltozási sebesség

$$\dot{\varphi}_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(D_{11} - D_{22})^2 + (D_{11} - D_{33})^2 + (D_{22} - D_{33})^2 + 6(D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{23}^2)}$$

Egyenértékű alakváltozás $\varphi_{eq} = \int_0^t \dot{\varphi}_{eq}(t) \cdot dt$